

MN I

Examen IV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

MN I

Examen IV

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Métodos Numéricos I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Matemáticas.

Grupo B.

Profesor Teresa Encarnación Pérez Fernández.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 13 de junio de 2022.

Primera Parte [4 puntos]

Ejercicio 1. Se pretende resolver el sistema $Ax = b$ donde A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & a & -a \\ -4 & 3 & -4 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

y $b = (a, 3, 1)^T$, donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

1. Determine para que valores del parámetro a :

a) Se puede resolver utilizando el método de Gauss sin intercambio de filas.

Para ello, es necesario que $a_{kk}^{(k)} \neq 0 \forall k = 1, \dots, n$.

$$\begin{pmatrix} -3 & a & -a \\ -4 & 3 & -4 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F'_2 = F_2 - \frac{4}{3}F_1 \\ F'_3 = F_3 + \frac{2}{3}F_1}} \begin{pmatrix} -3 & a & -a \\ 0 & 3 - \frac{4a}{3} & -4 + \frac{4a}{3} \\ 0 & 7 + \frac{2a}{3} & -4 - \frac{2a}{3} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{F'_3 = F_3 + m_{3,2}F_2 \\ m_{3,2} = -\frac{7 + \frac{2a}{3}}{3 - \frac{4a}{3}} = \frac{21 + 2a}{4a - 9}}} \begin{pmatrix} -3 & a & -a \\ 0 & 3 - \frac{4a}{3} & -4 + \frac{4a}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10a - 48}{4a - 9} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}^{(1)} = -3 \neq 0$$

$$a_{22}^{(2)} = 3 - \frac{4a}{3} = 0 \iff 9 = 4a \iff a = \frac{9}{4}$$

$$a_{33}^{(3)} = \frac{10a - 48}{4a - 9} = 0 \iff 10a = 48 \iff a = \frac{48}{10}$$

Por tanto, se puede resolver siempre que $a \neq \{\frac{9}{4}, \frac{48}{10}\}$.

b) Se puede resolver usando una descomposición LU de A .

En este caso, es necesario que todos sus menores principales sean no nulos.

$$|-3| = -3 \quad \left| \begin{array}{cc} -3 & a \\ -4 & 3 \end{array} \right| = -9 + 4a = 0 \iff a = \frac{9}{4}$$

$$|A| = 36 - 8a + 28a + 6a - 84 - 16a = 10a - 48 = 0 \iff a = \frac{48}{10}$$

Por tanto, se puede resolver siempre que $a \neq \{\frac{9}{4}, \frac{48}{10}\}$. Como vemos, es análogo al método de Gauss sin intercambio de filas.

c) El método iterativo de Gauss-Seidel es convergente.

En el caso de Gauss-Seidel, la matriz de descomposición es $Q = D + L$. Por tanto,

$$\begin{aligned} Ax = b &\implies (Q - (Q - A))x = b \implies Qx = (Q - A)x + b \implies \\ &\implies x = Q^{-1}(Q - A)x + Q^{-1}b = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b \end{aligned}$$

Por tanto, $B_{G-S} = I - Q^{-1}A = I - (D + L)^{-1}A$

$$(D + L)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{17}{18} & \frac{2}{12} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$B_{G-S} = I - Q^{-1}A = I - (D + L)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{3} & -\frac{a}{3} \\ 0 & \frac{4a}{9} & \frac{-4a+12}{9} \\ 0 & \frac{17a}{18} & \frac{-17a+42}{18} \end{pmatrix}$$

Para ver si es convergente, calculamos sus valores propios.

$$\begin{aligned} P_{B_{G-S}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{a}{3} & -\frac{a}{3} \\ 0 & \frac{4a}{9} - \lambda & \frac{-4a+12}{9} \\ 0 & \frac{17a}{18} & \frac{-17a+42}{18} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 4a - 9\lambda & -4a + 12 \\ 17a & -17a + 42 - 18\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\lambda}{9 \cdot 18} [(4a - 9\lambda)(-17a + 42 - 18\lambda) - 17a(-4a + 12)] = \\ &= -\frac{\lambda}{9 \cdot 18} (-68a^2 + 168a - 72a\lambda + 153a\lambda - 378\lambda + 162\lambda^2 + 68a^2 - 204a) = \\ &= -\frac{\lambda}{9 \cdot 18} [162\lambda^2 + (81a - 378)\lambda - 36a] = -\frac{\lambda}{18} [18\lambda^2 + (9a - 42)\lambda - 4a] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{-9a + 42 \pm \sqrt{(9a - 42)^2 + 16 \cdot 18a}}{2 \cdot 18} = \\ &= \frac{-9a + 42 \pm \sqrt{81a^2 + 1764 - 756a + 16 \cdot 18a}}{2 \cdot 18} = \\ &= \frac{-9a + 42 \pm \sqrt{81a^2 - 468 + 1764}}{2 \cdot 18} = \frac{-3a + 14 \pm \sqrt{9a^2 - 52a + 196}}{2 \cdot 6} \end{aligned}$$

2. Para $a = 1$ escriba las ecuaciones explícitas del método de Jacobi y Gauss-Seidel y realice tres iteraciones de ambos métodos.

$$\left. \begin{array}{l} -3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 1 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{3}(1 - x_2 + x_3) \\ x_2 = \frac{1}{3}(3 + 4x_1 + 4x_3) \\ x_3 = -\frac{1}{4}(1 - 2x_1 - 7x_2) \end{array} \right\}$$

Ecuaciones de Jacobi:

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{3}(1 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(3 + 4x_1^{(k)} + 4x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{4}(1 - 2x_1^{(k)} - 7x_2^{(k)}) \end{array} \right\}$$

Tres iteraciones del método de Jacobi:

k	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{3}$
3	$-\frac{19}{27}$	$+\frac{26}{9}$	$+\frac{13}{72}$

Ecuaciones de Gauss-Seidel:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{3}(1 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(3 + 4x_1^{(k+1)} + 4x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{4}(1 - 2x_1^{(k+1)} - 7x_2^{(k+1)}) \end{aligned} \right\}$$

Tres iteraciones del método de Gauss-Seidel:

k	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$
2	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{35}{27}$	$+\frac{50}{27}$
3	$-\frac{14}{27}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{235}{54}$

3. Para $a = 0$ resuelva el sistema utilizando el método de Gauss con pivote total.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F'_2 = F_2 - \frac{4}{3}F_1 \\ F'_3 = F_3 + \frac{2}{3}F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{F'_3 = F_3 + m_{3,2}F_2 \\ m_{3,2} = -\frac{7}{3}}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & -6 \end{array} \right)$$

Por tanto,

$$x_3 = -\frac{18}{16} = -\frac{9}{8} \quad x_2 = \frac{3 + 4x_3}{3} = \frac{5}{2} \quad x_1 = 0$$

Ejercicio 2. Dada la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, para $n \geq 1$, se considera la expresión

$$\|A\|_S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{1}$$

1. Demuestre que (1) define una norma matricial.

- $\|A\|_S \geq 0$, ya que cada sumando es ≥ 0 debido al valor absoluto. Además,

$$\|A\|_S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 0 \iff |a_{ij}| = 0 \forall i, j \iff A = 0$$

- $\|cA\|_S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |ca_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c| |a_{ij}| = |c| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = |c| \cdot \|A\|_S$

- $\|A + B\|_S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + |b_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| +$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \|A\|_S + \|B\|_S$$

- Veamos que $\|AB\|_S \leq \|A\|_S \|B\|_S$

$$\begin{aligned} \|AB\|_S &= \sum_{i,j=1}^n |(ab)_{ij}| = \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i,j,k=1}^n |a_{ik} b_{kj}| = \sum_{i,j,k=1}^n |a_{ik}| \cdot |b_{kj}| \leq \\ &\leq \sum_{i,j,k,s=1}^n |a_{ik}| \cdot |b_{sj}| = \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}| \sum_{s,j=1}^n |b_{sj}| \stackrel{\text{Asociativa}}{=} \left(\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}| \right) \left(\sum_{s,j=1}^n |b_{sj}| \right) = \\ &= \|A\|_S \|B\|_S \end{aligned}$$

2. Calcule $\|I_n\|_S$ donde I_n es la matriz identidad de orden n .

$$\|I_n\|_S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(I_n)_{ij}| = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

3. ¿Es una $\|\cdot\|_S$ una norma inducida? Justique la respuesta.

Supongamos que lo fuese. Por tanto, $\exists \|\cdot\|$ norma vectorial tal que:

$$\|A\|_S = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Por tanto, suponiendo que $\|\cdot\|_S$ es una norma inducida:

$$\|I_n\|_S = \max_{x \neq 0} \frac{\|I_n x\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} 1 = 1$$

Por tanto, como hemos llegado a un absurdo, ya que $n \neq 1$, entonces la suposición es falsa. No es una norma inducida.

Observación. Se ha demostrado que, para toda norma inducida $\|\cdot\|_M$, la norma de la identidad es $\|I_n\|_M = 1$.

4. Estime el número de condición asociado a la norma (1) de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(B) = \|B\|_S \|B^{-1}\|_S$$

En primer, lugar, calculo B^{-1} :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculo cada norma:

$$\|B\|_S = 5 + 2 + 2 + 1 = 10 \quad \|B^{-1}\|_S = 1 + 2 + 2 + 5 = 10$$

Por tanto,

$$\kappa(B) = \|B\|_S \|B^{-1}\|_S = 10^2$$

Por tanto, podemos esperar la pérdida de 2 dígitos significativos en el cálculo de la solución de un sistema con B como matriz de coeficientes.

Segunda Parte [4 puntos]

Ejercicio 3. Se consideran los datos $f(-1) = f(1) = 0,345$, $f(0) = f(2) = 1,67$.

1. Estime el valor de $f(0,5)$ utilizando el algoritmo de Newton-Horner en aritmética finita de tres dígitos por redondeo.

Calcule en primer lugar la tabla de diferencias divididas:

x_i	$f[x_i]$			
-1	0,345			
		1,33		
0	1,67		-1,33	
		-1,33		0,887
1	0,345		1,33	
		1,33		
2	1,67			

Por tanto, el polinomio de interpolación es

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 0,345 + 1,33(x + 1) - 1,33x(x + 1) + 0,887x(x + 1)(x - 1) \\ &= 0,345 + (x + 1)[1,33 + x[-1,33 + 0,887(x - 1)]] \end{aligned}$$

Para reducir el error por redondeo, evaluamos usando el algoritmo de Newton-Horner:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 0,345 + 1,5[1,33 + 0,5[-1,33 - 0,5 \cdot 0,887]] \\ &= 0,345 + 1,5[1,33 + 0,5[-1,33 - 0,444]] \\ &= 0,345 + 1,5[1,33 - 0,885] = 0,345 + 1,5[0,445] \\ &= 0,345 + 0,668 = 1,01 \end{aligned}$$

2. Estime el error cometido en el apartado anterior, sabiendo que $|f^{(k)}| < 0,3$, para todo x , y para cualquier orden de derivación k .

El error cometido viene dado por:

$$|e(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{(4!)} |x(x + 1)(x - 1)(x - 2)|$$

Por tanto, evaluando en $x = 0,5$, tenemos:

$$|e(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{24} \cdot \frac{9}{16}$$

Como sabemos que $|f^{(k)}| < 0,3$, para todo x , y para cualquier orden de derivación k , tenemos, por tanto, que:

$$|e(x)| < \frac{0,3 \cdot 9}{24 \cdot 16} = \frac{9}{1280} = 7,031 \cdot 10^{-3}$$

Ejercicio 4. Se considera la tabla de datos

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-6,5	-1,5	-0,5	3,5	9,5

1. Calcule la aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x)$ en el espacio vectorial $\mathcal{U} = \mathcal{L}\{x, x^2\}$

Sea la mejor aproximación $u(x) = ax + bx^2 \in \mathcal{U}$, y consideramos el producto escalar discreto siguiente:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^5 f(x_i)g(x_i)$$

Calculamos los siguientes productos escalares:

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &= 10 & \langle x^2, x^2 \rangle &= 34 & \langle x, x^2 \rangle &= 0 \\ \langle f, x \rangle &= 37 & \langle f, x^2 \rangle &= 14\end{aligned}$$

Por trabajar con una base ortogonal, tenemos que:

$$a_i = \frac{\langle e_i, f \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$$

Por tanto,

$$a_1 = \frac{37}{10} \quad a_2 = \frac{14}{34} = \frac{7}{17}$$

Por tanto, la mejor aproximación de f en \mathcal{U} es:

$$u(x) = \frac{37}{10}x + \frac{7}{17}x^2$$

2. Calcule las diferencias divididas de orden 1 (con dos argumentos) para los datos de la tabla y llámelas P_1, P_2, P_3 y P_4 .

$$\begin{aligned}P_1 &= f[-2, -1] = \frac{-1,5 + 6,5}{-1 + 2} = 5 & P_2 &= f[-1, 0] = 1 \\ P_3 &= f[0, 1] = 4 & P_4 &= f[1, 2] = 6\end{aligned}$$

3. Calcule el spline cúbico de clase 1 en los nodos $-2, 0$ y 2 , $s(x) \in S_3^1(-2, 0, 2)$, tomando como derivadas en los nodos:

$$d_0 = P_1, \quad d_1 = \frac{P_2 + P_3}{2}, \quad d_2 = P_4.$$

Interpolamos mediante Hermite en cada intervalo:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & [-2, 0] & & \\
 x_i & f(x_i) & & \\
 \hline
 -2 & -6,5 & & \\
 & & \mathbf{d_0 = 5} & \\
 -2 & -6,5 & -1 & \\
 & & 3 & \frac{3}{8} \\
 0 & -0,5 & -\frac{1}{4} & \\
 & & d_1 = \frac{5}{2} & \\
 0 & -0,5 & & \\
 \hline
 & [0, 2] & & \\
 x_i & f(x_i) & & \\
 \hline
 0 & -0,5 & & \\
 & & \mathbf{d_1 = \frac{5}{2}} & \\
 0 & -0,5 & \frac{5}{4} & \\
 & & 5 & -\frac{3}{8} \\
 2 & 9,5 & \frac{1}{2} & \\
 & & d_2 = 6 & \\
 2 & 9,5 & &
 \end{array}$$

Por tanto, el spline queda:

$$s(x) = \begin{cases} -6,5 + 5(x+2) - (x+2)^2 + \frac{3}{8}x(x+2)^2 & \text{si } x \in [-2, 0] \\ -0,5 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{8}x^2(x-2) & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases}$$

4. Compare los valores que proporcionan el spline y la aproximación por mínimos cuadrados en los nodos -1 y 1 . ¿Qué modelo elegiría?

En $x = -1$, tenemos:

$$s(-1) = -2,875 \qquad u(-1) \approx -3,288$$

En $x = 1$, tenemos:

$$s(1) = 3,625 \qquad u(1) \approx 4,112$$

Por tanto, en ambos casos tenemos que el spline se aproxima más a los valores correctos de f .